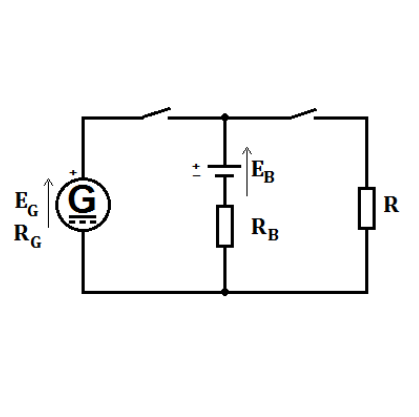
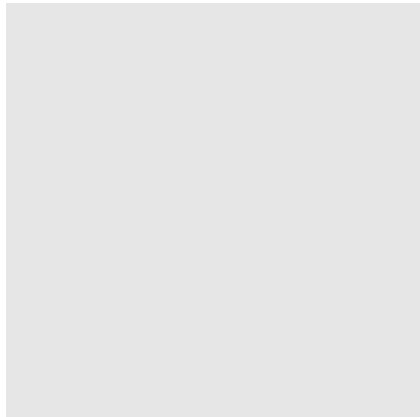
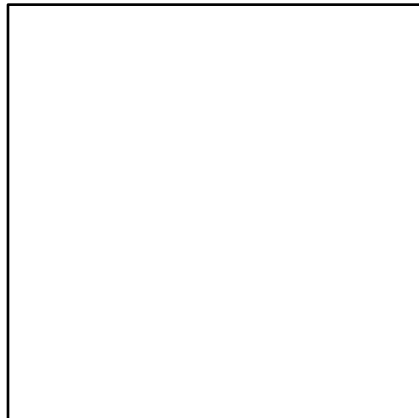


MASKELIGNINGER - KIRCHHOFFS LOVE (DC)

Eksempel



KELD DÝRMOSE

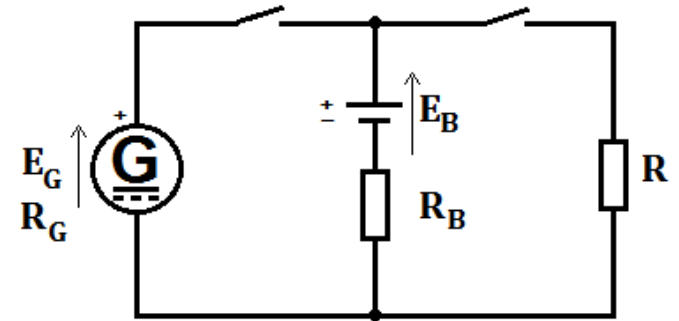


AAMS

Aarhus Maskinmesterskole
Aarhus School of Marine and Technical Engineering

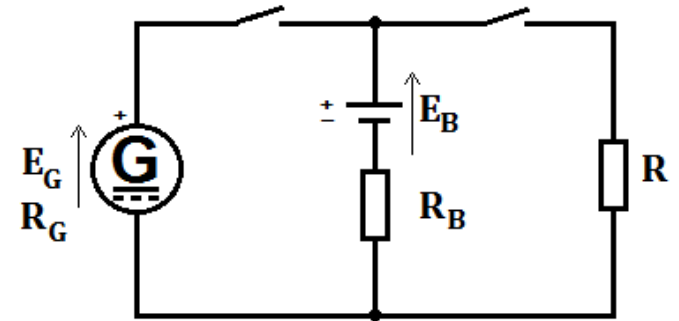
Maskeligninger

Ved beregning af kredsløb med flere masker og flere elektromotoriske kræfter (E), er det ofte ret besværligt at løse for ubekendte uden hjælpeværktøjer.



Maskeligninger

Ved beregning af kredsløb med flere masker og flere elektromotoriske kræfter (E), er det ofte ret besværligt at løse for ubekendte uden hjælpeværktøjer. Et sådant hjælpeværktøj er opstilling af maskeligninger ved brug af:



Kirchhoffs love

1. Lov:

Summen af strømmene der flyder til et knudepunkt, er lig med summen af strømmene der flyder fra et knudepunkt.

2. Lov:

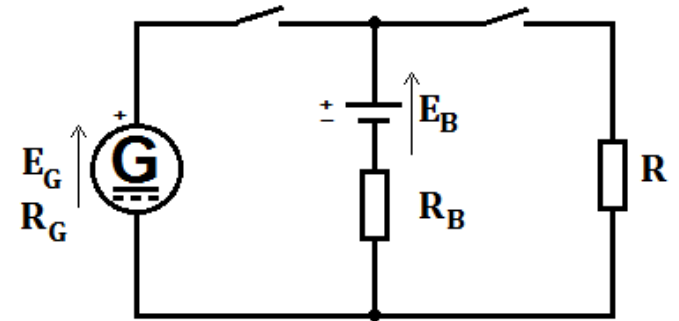
I en lukket elektrisk kreds er summen af de elektromotoriske kræfter regnet med fortegn, lig med summen af spændingsfaldene regnet med fortegn.

$$\sum E = \sum (I \cdot R)$$

Maskeligninger

Eksempel.

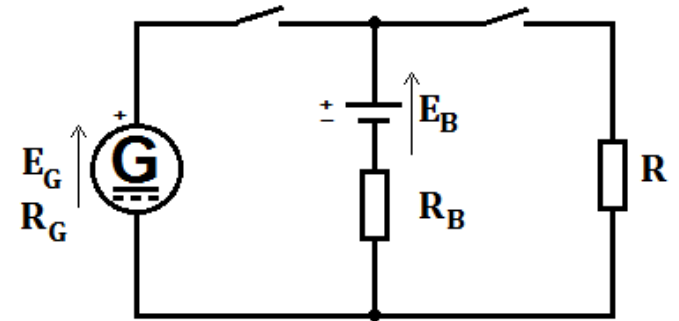
Lad os beregne strømmene der løber i kredsløbet her til højre, givet følgende oplysninger:



Maskeligninger

Eksempel.

Lad os beregne strømmene der løber i kredsløbet her til højre, givet følgende oplysninger:



$$E_G = 27 \text{ V}$$

$$R_G = 1 \Omega$$

$$E_B = 24 \text{ V}$$

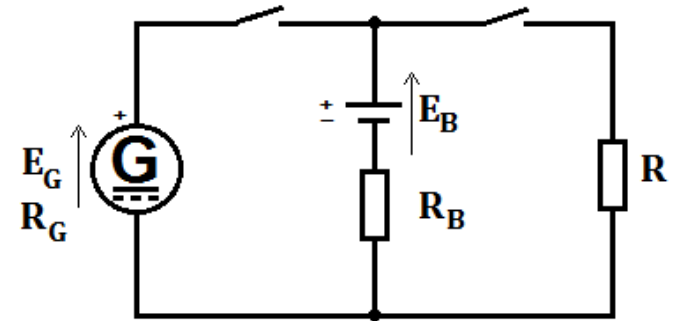
$$R_B = 2 \Omega$$

$$R = 8 \Omega$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 1. lov

Når kontakterne slutes, kan det være vanskeligt med sikkerhed at sige hvilken vej strømmene kommer til at løbe.



$$E_G = 27 V$$

$$R_G = 1 \Omega$$

$$E_B = 24 V$$

$$R_B = 2 \Omega$$

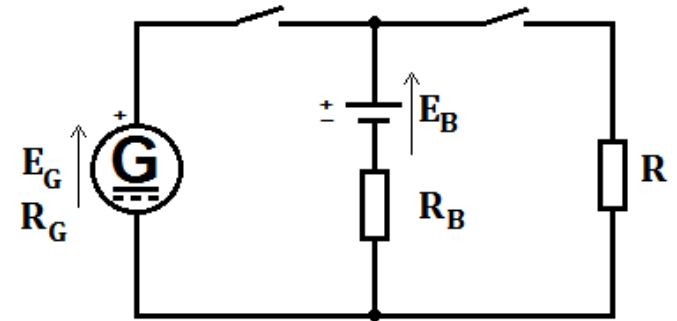
$$R = 8 \Omega$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 1. lov

Når kontakterne slutes, kan det være vanskeligt med sikkerhed at sige hvilken vej strømmene kommer til at løbe.

Heldigvis er det helt uden betydning **hvilken retning** der vælges på de (her) 3 forskellige strømme, men det er vigtigt **at der vælges** en retning på dem!



$$\begin{aligned}E_G &= 27 \text{ V} \\R_G &= 1 \ \Omega \\E_B &= 24 \text{ V} \\R_B &= 2 \ \Omega \\R &= 8 \ \Omega\end{aligned}$$

Maskeligninger

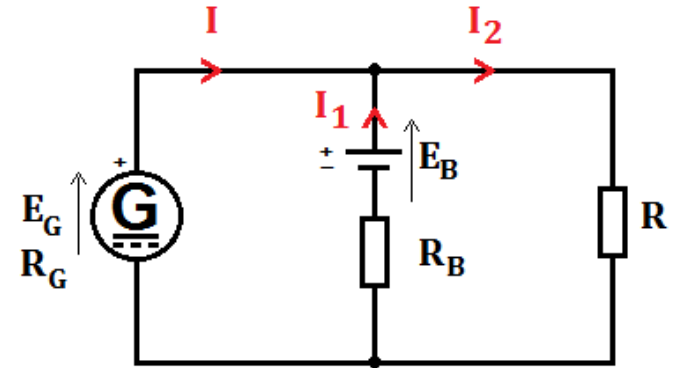
Kirchhoffs 1. lov

Når kontakterne slutes, kan det være vanskeligt med sikkerhed at sige hvilken vej strømmene kommer til at løbe.

Heldigvis er det helt uden betydning **hvilken retning** Der vælges på de (her) 3 forskellige strømme, men det er vigtigt **at der vælges** en retning på dem!

Lad os slutte kredsen og vælge strømretninger:

$$I + I_1 = I_2$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 1. lov

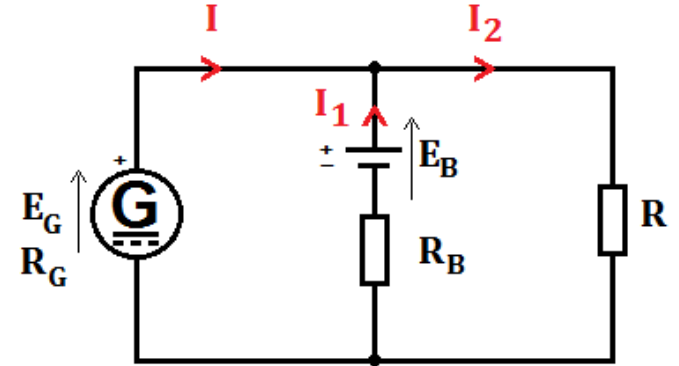
Når kontakterne slutes, kan det være vanskeligt med sikkerhed at sige hvilken vej strømmene kommer til at løbe.

Heldigvis er det helt uden betydning **hvilken retning** Der vælges på de (her) 3 forskellige strømme, men det er vigtigt **at der vælges** en retning på dem!

Lad os slutte kredsen og vælge strømretninger:

$$I + I_1 = I_2$$

Hvis dette valg skulle vise sig at være forkert, kan det ses ved at den forkerte valgte strømretning vil få et negativt fortegn i den kommende beregning.

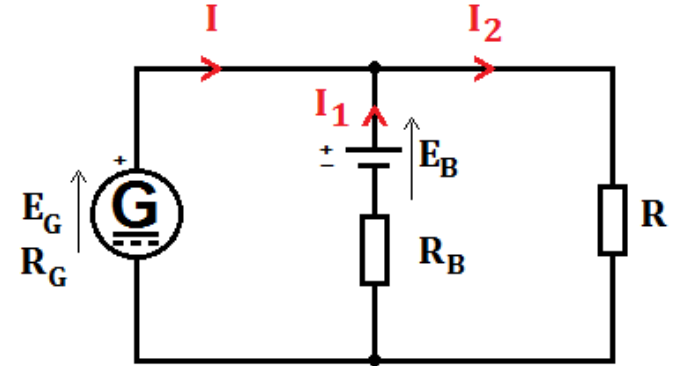


$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Når vi skal beregne strømmene i kredsløbet, opdeler vi kredsløbet i to separate kredsløb (masker), som til løses som to ligninger med to ubekendte.

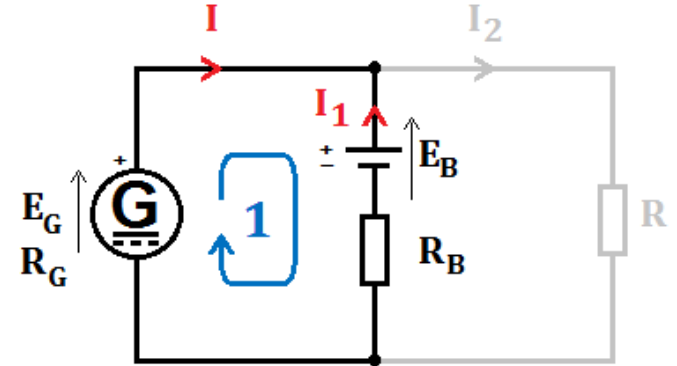


$$\begin{aligned}E_G &= 27 \text{ V} \\R_G &= 1 \ \Omega \\E_B &= 24 \text{ V} \\R_B &= 2 \ \Omega \\R &= 8 \ \Omega\end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Når vi skal beregne strømmene i kredsløbet, opdeler vi kredsløbet i to separate kredsløb (masker), som løses som to ligninger med to ubekendte.



Maske 1

Vi opstiller en ligning for dette kredsløb efter følgende regler:

- Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.
- Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

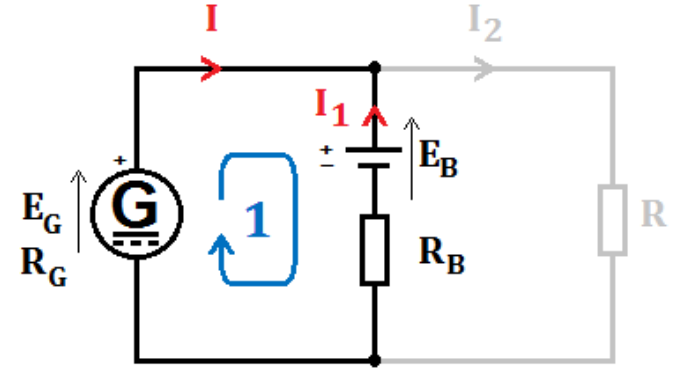
$$\begin{aligned}E_G &= 27 \text{ V} \\R_G &= 1 \Omega \\E_B &= 24 \text{ V} \\R_B &= 2 \Omega \\R &= 8 \Omega\end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$E_G - E_B =$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

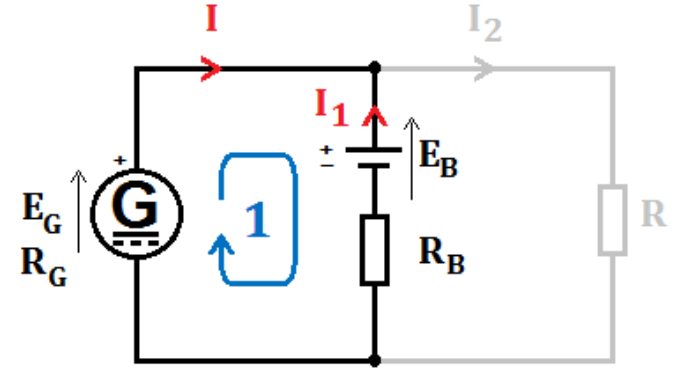
Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$E_G - E_B = R_G \cdot I - R_B \cdot I_1$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

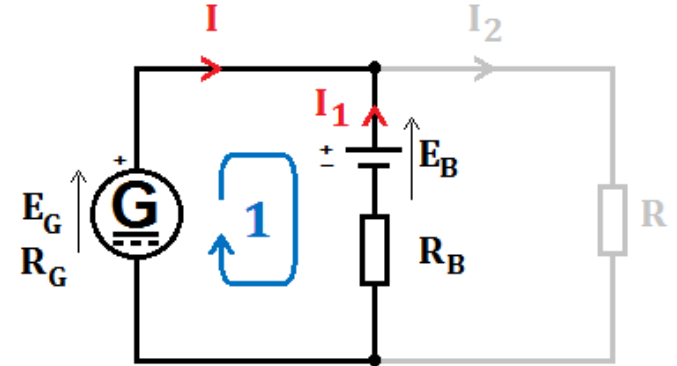
Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$E_G - E_B = R_G \cdot I - R_B \cdot I_1 \quad \Rightarrow$$

$$27 - 24 = 1 \cdot I - 2 \cdot I_1 \quad \Leftrightarrow$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

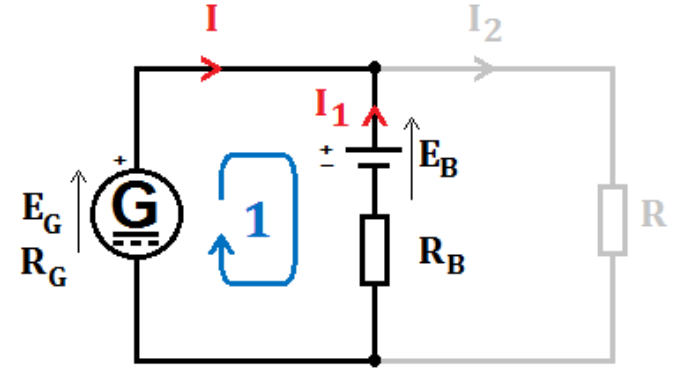
Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$E_G - E_B = R_G \cdot I - R_B \cdot I_1 \quad \Rightarrow$$

$$27 - 24 = 1 \cdot I - 2 \cdot I_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$I = 2I_1 + 3$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \Omega \\ R &= 8 \Omega \end{aligned}$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

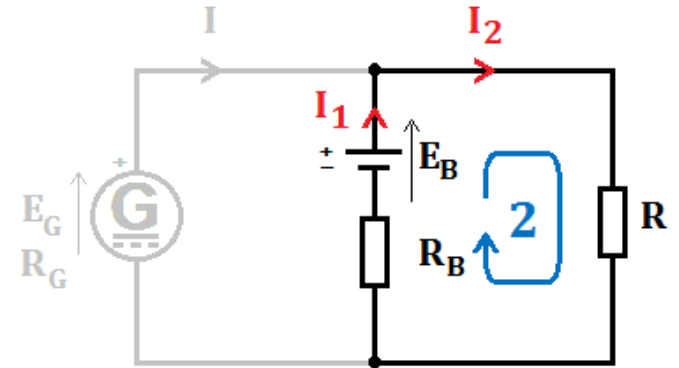
Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

Maske 2

$$E_B =$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

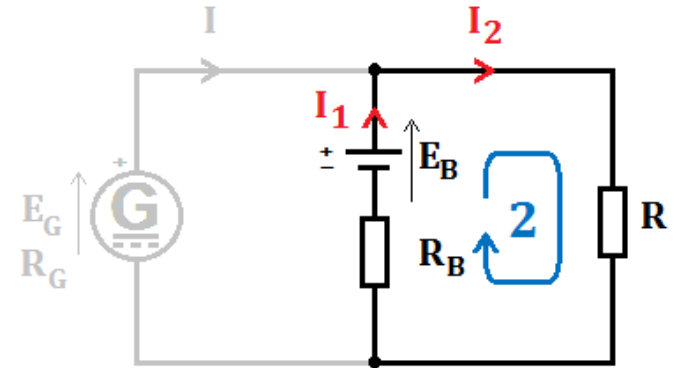
Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

Maske 2

$$E_B = R_B \cdot I_1 + R \cdot I_2$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

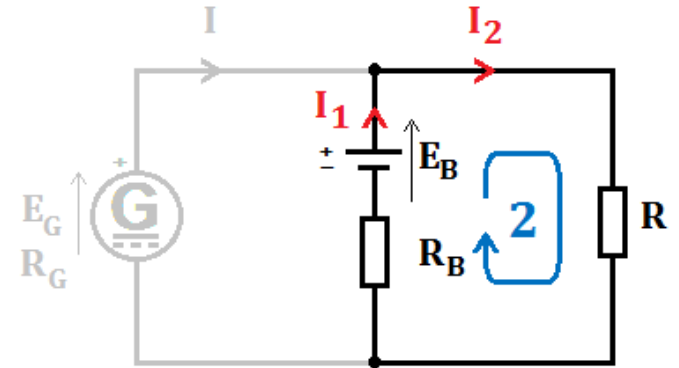
Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

Maske 2

$$E_B = R_B \cdot I_1 + R \cdot I_2 \quad \Rightarrow$$

$$24 = 2 \cdot I_1 + 8 \cdot I_2 \quad \Leftrightarrow$$



$$E_G = 27 \text{ V}$$

$$R_G = 1 \ \Omega$$

$$E_B = 24 \text{ V}$$

$$R_B = 2 \ \Omega$$

$$R = 8 \ \Omega$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

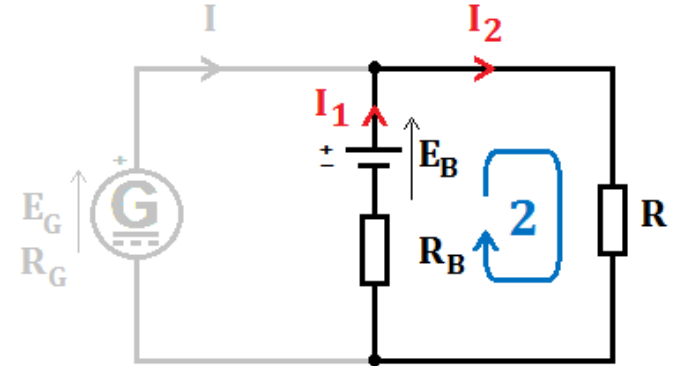
Maske 2

$$E_B = R_B \cdot I_1 + R \cdot I_2 \quad \Rightarrow$$

$$24 = 2 \cdot I_1 + 8 \cdot I_2 \quad \Leftrightarrow$$

Som det ses af de to maskeligninger, har vi stadig 3 ubekendte, og det dur ikke. Derfor erstatter vi nu I_2 i maske 2 med et udtryk fra det tidligere fundne i Kirchhoffs 1. lov:

$$I + I_1 = I_2$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

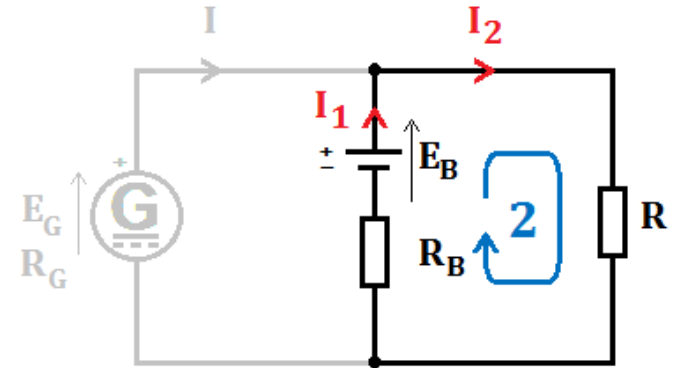
$$I = 2I_1 + 3$$

Maske 2

$$E_B = R_B \cdot I_1 + R \cdot I_2 \quad \Rightarrow$$

$$24 = 2 \cdot I_1 + 8 \cdot I_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$24 = 2I_1 + 8(I + I_1) \quad \Leftrightarrow$$



$$E_G = 27 \text{ V}$$

$$R_G = 1 \Omega$$

$$E_B = 24 \text{ V}$$

$$R_B = 2 \Omega$$

$$R = 8 \Omega$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

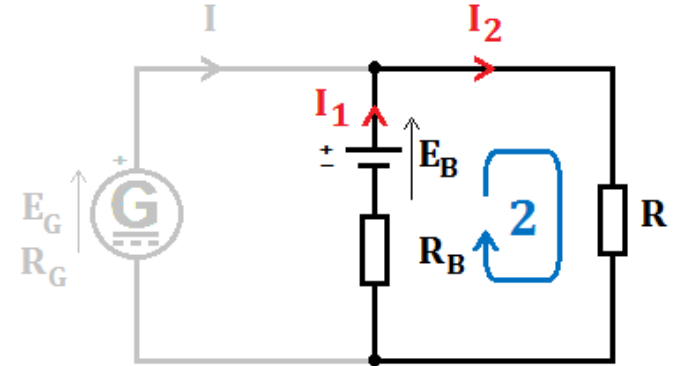
Maske 2

$$E_B = R_B \cdot I_1 + R \cdot I_2 \quad \Rightarrow$$

$$24 = 2 \cdot I_1 + 8 \cdot I_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$24 = 2I_1 + 8(I + I_1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{8I = -10I_1 + 24}$$



$$E_G = 27 \text{ V}$$

$$R_G = 1 \ \Omega$$

$$E_B = 24 \text{ V}$$

$$R_B = 2 \ \Omega$$

$$R = 8 \ \Omega$$

Alle **elektromotoriske kræfter** på den ene side af lighedstegnet. De som virker i samme retning som valgte **regneretning** opstilles som positive, og de som virker imod som negative.

Alle **spændingsfald** placeres på den anden side af lighedstegnet. De spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i samme retning som **regneretningen**, opstilles som positive, og de spændingsfald som forårsages af strømme der er valgt til at løbe i modsat retning, opstilles som negative.

Maskeligninger

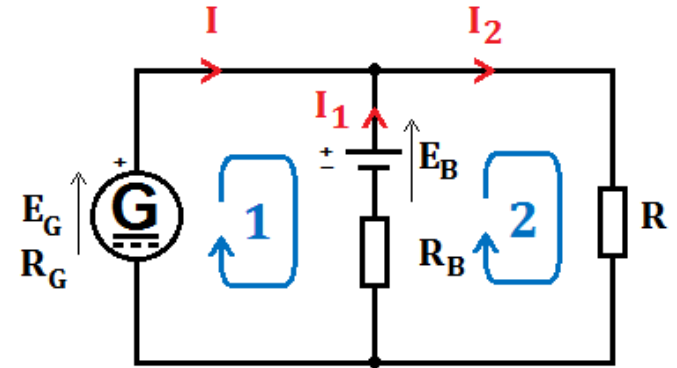
Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

Maske 2

$$8I = -10I_1 + 24$$



Herfra løses opgaven blot som 2 ligninger med 2 ubekendte:

$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

Maske 2

$$8I = -10I_1 + 24$$

Lige store koefficienters metode:

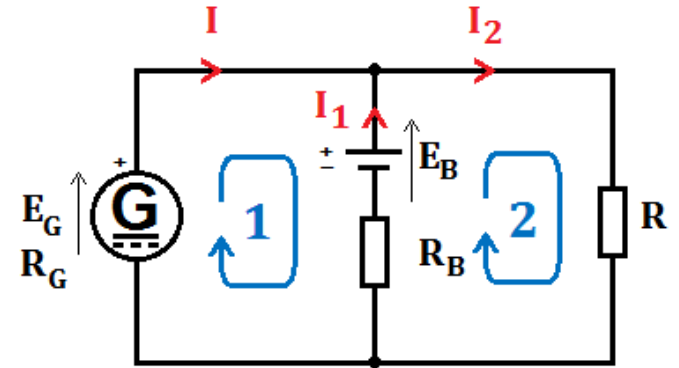
$$I = 2I_1 + 3 \quad 8I = -10I_1 + 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$8I = 16I_1 + 24 \quad 8I = -10I_1 + 24 \quad \Rightarrow$$

$$16I_1 + 24 = -10I_1 + 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$6I_1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$I_1 = 0 \text{ A}$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

Maske 2

$$8I = -10I_1 + 24$$

substitutionsmetoden:

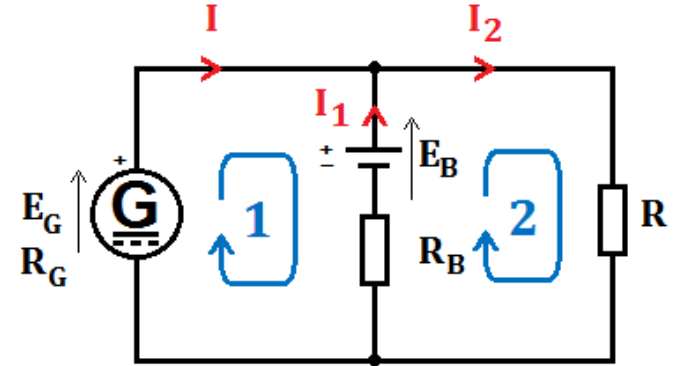
$$I = 2I_1 + 3 \quad 8I = -10I_1 + 24 \quad \Rightarrow$$

$$8(2I_1 + 3) = -10I_1 + 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$16I_1 + 24 = -10I_1 + 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$6I_1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$I_1 = 0 \text{ A}$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

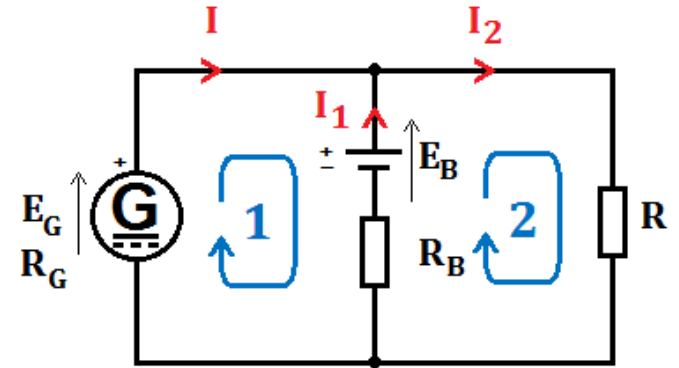
$$I = 2I_1 + 3$$

$$I_1 = 0 \text{ A}$$

Maske 2

$$8I = -10I_1 + 24$$

Herefter indsættes der blot i maskeligningerne, for at finde de sidste 2 ubekendte strømme:



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

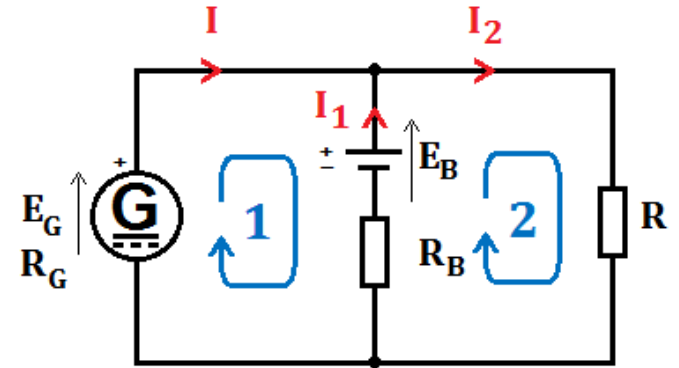
$$I_1 = 0 \text{ A}$$

Maske 2

$$8I = -10I_1 + 24$$

Herefter indsættes der blot i maskeligningerne, for at finde de sidste 2 ubekendte strømme:

$$I = 2I_1 + 3 \Rightarrow I = 2 \cdot 0 + 3 \Leftrightarrow I = 3 \text{ A}$$



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Kirchhoffs 2. lov

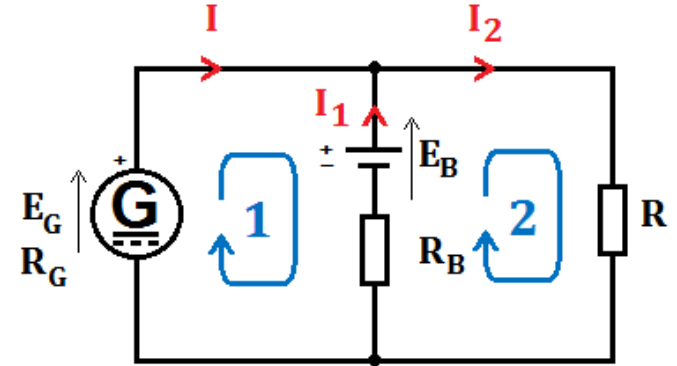
Maske 1

$$I = 2I_1 + 3$$

$$I_1 = 0 \text{ A}$$

Maske 2

$$8I = -10I_1 + 24$$



Herefter indsættes der blot i maskeligningerne, for at finde de sidste 2 ubekendte strømme:

$$I = 2I_1 + 3 \Rightarrow I = 2 \cdot 0 + 3 \Leftrightarrow I = 3 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \Omega \\ R &= 8 \Omega \end{aligned}$$

For at finde I_2 skal den "originale" maskeligning for maske 2 bruges (slide 17):

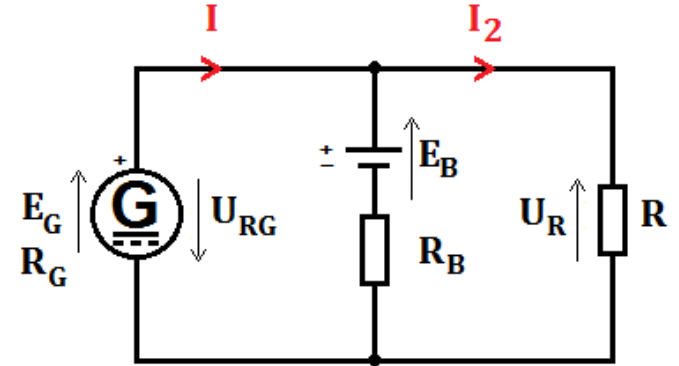
$$24 = 2I_1 + 8I_2 \Rightarrow 8I_2 = 24 - 2 \cdot 0 \Rightarrow I_2 = 3 \text{ A}$$

Maskeligninger

Svaret på spørgsmålet er altså:

$$I_1 = 0 \text{ A} \quad I = 3 \text{ A} \quad I_2 = 3 \text{ A}$$

Hvad kan vi så i øvrigt konkludere om kredsen med vores resultater?



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \Omega \\ R &= 8 \Omega \end{aligned}$$

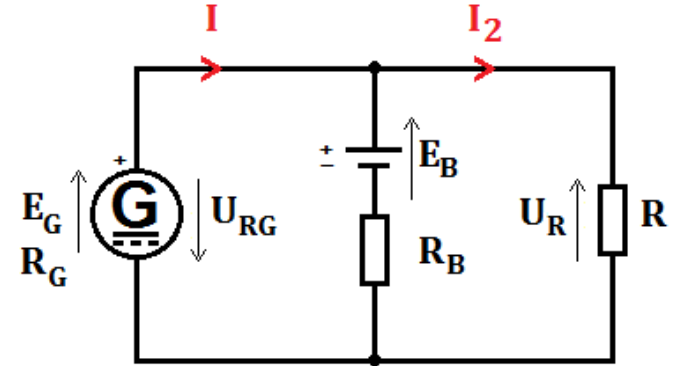
Maskeligninger

Svaret på spørgsmålet er altså:

$$I_1 = 0 \text{ A} \quad I = 3 \text{ A} \quad I_2 = 3 \text{ A}$$

Hvad kan vi så i øvrigt konkludere om kredsen med vores resultater?

- Da fortegn på beregnede strømme er positive, er valgte strømretning korrekt!



$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \ \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \ \Omega \\ R &= 8 \ \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

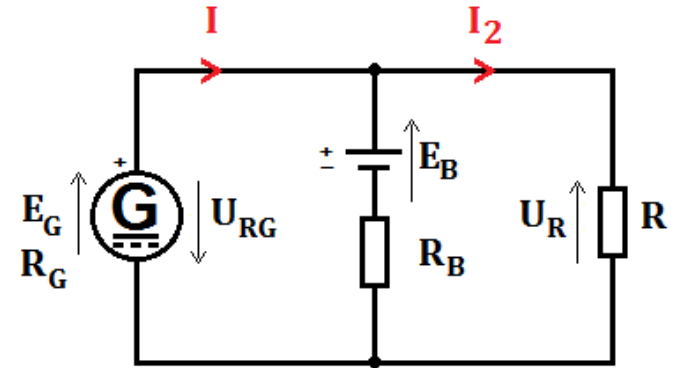
Svaret på spørgsmålet er altså:

$$I_1 = 0 \text{ A} \quad I = 3 \text{ A} \quad I_2 = 3 \text{ A}$$

Hvad kan vi så i øvrigt konkludere om kredsen med vores resultater?

- Da fortegn på beregnede strømme er positive, er valgte strømretning korrekt!
- Jævnstrømsgeneratorens klemspænding må her være:

$$U_G = E_G - (R_G \cdot I) \Rightarrow U_G = 27 - (1 \cdot 3) \Leftrightarrow U_G = 24 \text{ V}$$



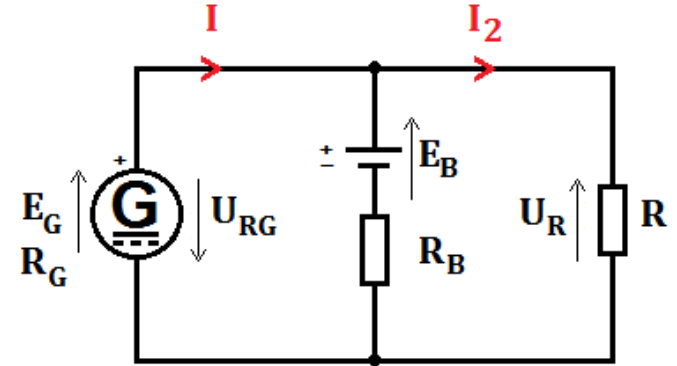
$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \Omega \\ R &= 8 \Omega \end{aligned}$$

Maskeligninger

Svaret på spørgsmålet er altså:

$$I_1 = 0 \text{ A} \quad I = 3 \text{ A} \quad I_2 = 3 \text{ A}$$

Hvad kan vi så i øvrigt konkludere om kredsen med vores resultater?



- Da fortegn på beregnede strømme er positive, er valgte strømretning korrekt!
- Jævnstrømsgeneratorens klemspænding må her være:
$$U_G = E_G - (R_G \cdot I) \Rightarrow U_G = 27 - (1 \cdot 3) \Leftrightarrow U_G = 24 \text{ V}$$
- Spændingen over resistansen R må være:
$$U_R = R \cdot I_2 \Rightarrow U_R = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow U_R = 24 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} E_G &= 27 \text{ V} \\ R_G &= 1 \Omega \\ E_B &= 24 \text{ V} \\ R_B &= 2 \Omega \\ R &= 8 \Omega \end{aligned}$$